

GEOMETRIA 1

prof. Riccardo Piergallini

Programma del corso

Nozioni preliminari. Insiemi, relazioni, funzioni, quozienti. Gruppi, omomorfismi, gruppi di permutazioni e azioni, segnatura. Campi, numeri razionali, numeri reali (separabilità e completezza), numeri complessi (piano di Gauss). Polinomi, teorema fondamentale dell'algebra.

Il piano e lo spazio euclideo. Gli assiomi di Euclide e di Hilbert, la retta euclidea e i numeri reali, proprietà di separazione delle poligoni chiuse nel piano, orientazioni, il postulato delle parallele e le geometrie non euclidee, congruenze e movimenti rigidi. Vettori geometrici, somma vettoriale, prodotto di un vettore per uno scalare, traslazioni e dilatazioni. Norma di un vettore, angolo tra due vettori, prodotto scalare di due vettori, distanza euclidea. Aree e volumi generati da vettori, prodotto vettoriale e prodotto misto. Trasformazioni geometriche (congruenze/isometrie, similitudini, collineazioni/affinità), il programma di Klein.

Geometria analitica del piano e dello spazio. Coordinate cartesiane, vettori e operazioni in termini di componenti. Trasformazioni geometriche in coordinate, cambiamenti di coordinate, coordinate polari, cilindriche e sferiche. Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani, distanze (punto-punto, punto-retta, punto-piano), intersezioni e angoli (retta-retta, retta-piano, piano-piano), condizioni di parallelismo e perpendicolarità. Equazioni cartesiane e parametriche di circonferenze e sfere, intersezioni con rette e piani. Coniche e quadriche come luoghi geometrici, intersezioni con rette e piani.

Spazi vettoriali. Dipendenza lineare, basi e dimensione. Sottospazi, somma e intersezione di sotto-spazi, formula di Grassmann. Sottospazi trasversali/complementari, somma diretta di sotto-spazi, prodotti e quozienti di spazi vettoriali. Applicazioni lineari, nucleo e immagine, teorema dell'omomorfismo, estensioni lineari di applicazioni definite su basi. Isomorfismi lineari, classificazione degli spazi vettoriali in base alla dimensione, coordinate lineari. Forme lineari, spazio duale, basi duali e isomorfismo indotto (in dimensione finita), isomorfismo canonico con lo spazio biduale, annullatore, applicazione trasposta. Forme bilineari e forme quadratiche, forma bilineare polare di una forma quadratica. Operatori lineari, gruppo degli automorfismi lineari.

Calcolo lineare. Spazi vettoriali numerici. Matrici, rappresentazione matriciale di applicazioni lineari, prodotto tra matrici, invertibilità e matrice inversa, matrici di cambiamento di base. Rango, operazioni elementari e riduzione a scalini. Determinanti, teorema di Laplace, teorema di Binet, criterio di invertibilità, principio degli orlati. Sistemi lineari e sottospazi, teorema di Rouché-Capelli, metodo di Gauss, metodo di Cramer. Forme bilineari e loro rappresentazione matriciale, diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche, teorema di Sylvester. Operatori lineari e matrici equivalenti, determinante di un operatore lineare, orientazioni di spazi vettoriali reali. Sottospazi invarianti, auto-valori e auto-vettori, polinomio caratteristico, molteplicità algebrica e geometrica di un auto-valore, criteri di triangolarizzazione e diagonalizzazione, forma canonica di Jordan. Gruppo lineare $GL(n)$, gruppo lineare speciale $SL(n)$.

Geometria affine. Spazi affini, vettori liberi e applicati, traslazioni e omotetie. Spazio affine numerico A^n , riferimenti e coordinate affini, cambiamenti di riferimento. Sottospazi affini, spazio direttore e parallelismo, equazioni di sottospazi affini, intersezione di sottospazi affini, teoremi di Talete e Desargues nel piano affine. Trasformazioni affini, rappresentazione matriciale. Gruppo affine $A(n)$, gruppo affine speciale $SA(n)$, struttura dei gruppi affini. Classificazione affine, invarianti affini. Quadriche affini e loro classificazione, riduzione a forma canonica.

Geometria proiettiva. Spazio proiettivo associato a uno spazio vettoriale, spazio proiettivo numerico P^n , riferimenti proiettivi e coordinate omogenee, cambiamenti di riferimento. Sottospazi proiettivi, equazioni omogenee di sottospazi proiettivi, intersezione di sottospazi proiettivi, sistemi lineari di sottospazi proiettivi. Chiusura proiettiva di uno spazio affine, punti propri e impropri, coordinate affini e coordinate omogenee, trasformazioni affini in coordinate omogenee. Dualità proiettiva, teorema di Desargues proiettivo. Trasformazioni proiettive, il gruppo proiettivo $PGL(n)$. Classificazione proiettiva, invarianti proiettivi. Quadriche proiettive, polarità, sistemi lineari di quadriche. Classificazione delle quadriche proiettive, riduzione a forma canonica.

Spazi vettoriali euclidei. Prodotti scalari, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, norma associata a un prodotto scalare, ortogonalità e angolo tra due vettori. Basi ortonormali, metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, coordinare lineari ortogonali. Sottospazi ortogonali, proiezioni ortogonali, riflessioni, dualità euclidea. Isometrie, forma canonica, gruppo ortogonale $O(n)$, gruppo ortogonale speciale $SO(n)$. Diagonalizzazione di operatori simmetrici e forme bilineari simmetriche, teorema spettrale. Spazi vettoriali euclidei complessi, prodotti hermitiani, basi ortonormali, automorfismi unitari e loro diagonalizzazione, operatori hermitiani e teorema spettrale.

Geometria euclidea. Spazi euclidei, distanza euclidea e misura degli angoli, isometrie e similitudini. Spazio euclideo numerico E^n , riferimenti e coordinate ortogonali, cambiamenti di riferimento. Sottospazi euclidei, distanza tra sottospazi paralleli, angolo tra sottospazi, ortogonalità. Trasformazioni euclidee, gruppo euclideo $E(n)$, gruppo euclideo speciale $SE(n)$, struttura dei gruppi euclidei. Classificazione euclidea, invarianti euclidei. Classificazione euclidea delle quadriche, riduzione a forma canonica.

Testo di riferimento

E. Sernesi, *Geometria 1*, Boringhieri

Testi consigliati

S. Abeasis, *Elementi di Algebra Lineare e Geometria*, Zanichelli

S. Abeasis, *Complementi di Algebra Lineare e Geometria*, Zanichelli

M. Abate, C. de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, McGraw-Hill

M. Abate, C. de Fabritiis, *Esercizi di geometria*, McGraw-Hill