Università di Camerino – Facoltà di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2009/2010

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Secondo semestre (1 marzo – 11 giugno 2010)

Registro delle lezioni

Lezione 1. (1° marzo, 1 ora)
Introduzione al corso.

Lezione 2. (2 marzo, 3 ore)
Spazi topologici, aperti e chiusi, sistemi di intorni, basi di aperti e di intorni, confronto tra topologie. Spazi metrici, topologia indotta da una metrica. Esempi di topologie metrizzabili e non metrizzabili. Operatori topologici di interno, chiusura e frontiera di un sottoinsieme, punti di accumulazione e punti isolati di un sottoinsieme.

Lezione 3. (3 marzo, 2 ore)
Applicazioni continue, definizione globale e locale (continuità in un punto), continuità della composizione di funzioni continue. Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi, immesioni topologiche. Sottospazi topologici, continuità delle restrizioni, teorema di incollamento delle funzioni continue.

Lezione 4. (4 marzo, 2 ore)
Unioni topologiche, caratterizzazione in termini di sottospazi aperti, continuità delle applicazioni definite su un'unione topologica. Prodotti topologici, proiezioni canoniche (continue e aperte, ma non chiuse), continuità delle applicazioni a valori in un prodotto topologico. Quozienti topologici, continuità di applicazioni definite su un quoziente, versione topologica del teorema di decomposizione canonica di un'applicazione.

Lezione 5. (9 marzo, 3 ore)
Azioni topologiche e quozienti. Proprietà topologiche globali e locali. Assiomi di separazione e metrizzabilità, assioma di Haussdorff e unicità dei limiti, regolarità e basi di intorni chiusi. Lemma di Urysohn per gli spazi metrizzabili, metrizzabile implica normale, metrizzabilità delle unioni e dei prodotti topologici.

Lezione 6. (11 marzo, 2 ore)
Assiomi di numerabilità: basi numerabili, basi di intorni numerabili, separabilità. Chiusura e continuità per successioni, spazi metrizzabili separabili hanno basi numerabili, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità.

Lezione 7. (16 marzo, 3 ore)
Spazi topologici compatti, compattezza dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della compattezza, compattezza di unioni e prodotti, sottospazi compatti di R^m. Spazi di Hausdorff compatti, normalità, decomposizione canonica delle applicazioni continue. Compattificazioni, esempi ($\widetilde{R}^m \cong B^m$, $\overline{R}^m \cong P^m$, $\widehat{R}^m \cong S^m$), compattificazione di Alexander.

Lezione 8. (17 marzo, 2 ore)

Compattezza di spazi metrici, compattezza per successioni e proprietà di Bolzano-Weierstrasse. Completezza, relazioni con la compattezza (locale), teorema di Baire, teorema del punto fisso per le contrazioni.

Lezione 9. (18 marzo, 2 ore)

Connessione e connessione per archi, connessione dell'intervallo $[0, 1]$, conservazione della connessione, connessione di unioni e prodotti, sottospazi connessi di R. Componenti connesse e connesse per archi.

Lezione 10. (23 marzo, 3 ore)

Omotopia tra applicazioni, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili. Omotopia relativa, deformazioni su sottospazi, spazi semplicemente connessi. Gruppo fondamentale, omomorfismi indotto dalle applicazioni continue, indipendenza dal punto base.

Lezione 11. (24 marzo, 2 ore)

Invarianza omotopica del gruppo fondamentale. Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni propriamente discontinue, proprietà di sollevamento unico dei cammini, delle omotopie e delle applicazioni, rivestimenti universali ($R \to S^1$, $R^m \to T^m$, $S^m \to P^m$ per $m > 1$).

Lezione 12. (25 marzo, 2 ore)

Gruppo delle trasformazioni di un rivestimento, regolarità e unicità del rivestimento universale, calcolo del gruppo fondamentale mediante il rivestimento universale ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^m$, $\pi_1(P^m) \cong \mathbb{Z}_2$ per $m > 1$).

Lezione 13. (30 marzo, 3 ore)

Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto. Gruppi liberi e loro proprietà universale, presentazioni (finite) di gruppi, prodotto libero e prodotto diretto. Teorema di Seifert-Van Kampen.

Lezione 14. (31 marzo, 2 ore)

Unione puntata di spazi topologici, gruppo fondamentale di un'unione puntata, $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$. Altre applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen: $\pi_1(R^2 - \{p_1, \ldots, p_k\})$, $\pi_1(S^m)$ con $m > 1$, $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(P^2)$.

Lezione 15. (7 aprile, 2 ore)

Classificazione omotopica delle sfere, invarianza topologica della dimensione. Teorema di Jordan e teorema di Schönfließ, casi speciali convesso e poligonale.

Lezione 16. (8 aprile, 2 ore)

Grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, indice di allacciamento di una curva piana orientata rispetto ad un punto, cenno alla dimostrazione del teorema di Jordan. Nodi nello spazio, gruppo di un nodo, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione. Gruppo del nodo banale e del nodo trifoglio.

Lezione 17. (13 aprile, 3 ore)

Varietà topologiche, carte locali e atlanti, carte spaciali, proprietà locali delle varietà. Teorema di invarianza del dominio, invarianza della dimensione per le varietà. Immergibilità delle varietà in spazi euclidei, metrizzabilità delle varietà. Curve topologiche, segmentazioni, classificazione delle curve connesse.

Lezione 18. (14 aprile, 2 ore)

Superfici topologiche, somma connessa, T_g (superficie orientabile di genere g) e P_g (superficie non orientabile di genere g), interpretazione topologica del genere. Poligonazioni, superfici compatte connesse come quozienti di dischi e come somme connesse di tori e proiettivi.

Lezione 19. (15 aprile, 2 ore)
Gruppo fondamentale delle superfici compatte connesse, abelianizzazione. Caratteristica di Eulero-Poincaré, interpretazione topologica dell'orientabilità. Classificazione delle superfici compatte connesse.

Lezione 20. (20 aprile, 3 ore)
Esercizi.

Lezione 21. (21 aprile, 2 ore)
Esercizi.

Lezione 22. (22 aprile, 2 ore)
Esercizi.

Lezione 23. (27 aprile, 3 ore)
Curve differenziabili regolari nel piano, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari. Riferimento di Frenet, curvatura.

Lezione 24. (28 aprile, 2 ore)
Formule di Frenet. Esempi: rette e circonferenze. Cerchio osculatore, forma canonica. Teorema fondamentale per le curve regolari nel piano, curve a curvatura costante.

Lezione 25. (29 aprile, 2 ore)
Rotazione e curvatura totale, rotazione totale di una curva di Jordan regolare, teorema di Fenchel, curve di Jordan convesse.

Lezione 26. (4 maggio, 3 ore)
Curve differenziabili regolari nello spazio, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari.

Lezione 27. (5 maggio, 2 ore)
Riferimenti di Frenet, curvatura e torsione, formule di Frenet. Esempi: rette, circonferenze e eliche circolari. Cerchio osculatore, forma canonica.

Lezione 28. (6 maggio, 2 ore)
Teorema fondamentale per le curve regolari nello spazio, curve a curvatura e torsione costante, condizione di planarità.

Lezione 29. (11 maggio, 3 ore)

Lezione 30. (12 maggio, 2 ore)

Lezione 31. (19 maggio, 2 ore)

Lezione 32. (20 maggio, 2 ore)

Lezione 33. (25 maggio, 3 ore)

Lezione 34. (26 maggio, 2 ore)

Lezione 35. (27 maggio, 2 ore)

Lezione 36. (1° giugno, 3 ore)

Lezione 37. (3 giugno, 2 ore)

Lezione 38. (8 giugno, 3 ore)

Lezione 39. (9 giugno, 2 ore)

Lezione 40. (10 giugno, 2 ore)